Список обозначений.

Будем использовать логические символы: кванторы общности и существования $\forall$ - «любой, для каждого, для всех», $\exists$ - «существует, найдется» , также будем использовать обозначения «$\exists!$»-«существует и единственен», «:» - «такое, что». Также будем использовать логические символы $\vee, \wedge$ для соединения высказываний союзами «или», «и» соответственно (в логике они называются «дизъюнкция» и «конъюнкция»). Логический символ $\Longrightarrow$ означает «влечет за собой», «следовательно», а символ $\Longleftrightarrow$ заменяет слова «равносильно», «тогда и только тогда, когда». Знак «$\equiv$» обозначает равенство по определению. Признаки, которые определяют элементы множества, будем заключать в фигурные скобки, например, запись $A = \{x : x^2 < 2\}$ обозначает «**множество *A* состоит из всех таких *x*, что** $x^2 < 2$» (двоеточие обычно заменяет слова «что», «такое, что»).

Сначала некоторые логические конструкции будут поясняться таким шрифтом в скобках.

Наконец, значками ◄ и ► будем обозначать начало и конец доказательств.

Глава 1. Действительные числа. Множества на числовой прямой. Существование точных граней ограниченных числовых множеств. Элементы теории множеств. Операции над множествами. Понятие счетного множества. Несчетность множества действительных чисел.

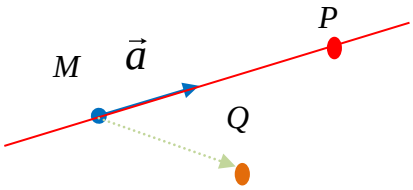
§1. Аксиоматическое введение множества вещественных чисел.

Чтобы не углубляться в предшествующие понятия, напомним, что в математике множество – как и точка, является первичным, неопределимым понятием, нам с вами достаточно знать, что множество это всё, что угодно, если только можно говорить о составляющих его элементах. Так, есть множество студентов вашей группы, множество всех молекул воды на данный момент в кулере, но так же ничего не будет страшного, если рассмотреть множество всех молекул воды в Средиземном море на данный момент, и даже во Вселенной, математиков же не будут смущать и такие абстракции, как множество точек на плоскости или множество точек в пространстве (трехмерном или большей размерности), или множество всех прямых в пространстве (запрещается только множество

всех множеств, потому что это понятие логически противоречивое, то есть приводит к парадоксу, о чем интересно будет почитать где-нибудь всем любящим головоломки). И если у каких-то множеств есть нечто общее, а вещи, их различающие, нас не интересуют, то можно изучать эти множества все одновременно, назвав их временно множеством А, к примеру, или пространством. Например, если требуется выяснить, сколько мест в автобусе нужно, чтобы разместить всех студентов вашей группы, можно абстрагироваться от всех ваших замечательных свойств и заменить всех вас числами, пронумеровав каждого. Тогда вместо вашей группы появится множество натуральных чисел от одного до N (N=27 или N=31, скажем, в зависимости от конкретной группы). И все вопросы выделения мест в автобусе или гостинице будут решаться рассмотрением этого множества. Так же, как, например, вопрос, сколькими способами можно выбрать из вашей группы пять человек для поездки в Париж (или для мытья полов в спортзале). Это число равно $\frac{N!}{5!(N-5)!}$ и абсолютно не зависит (с точки зрения математики), хорошо ли Маша моет пол, и разрешит ли папа Мише ехать в Париж. А вот если Маша хочет пригласить в гости пять человек и ей нужно рассмотреть все способы, как их посадить за стол, то ей тоже можно заменить каждого карточкой с номером от одного до пяти и поразкладывать эти карточки разными способами. Всего получится $5!(=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$, если кто не знает, что означает значок «!», факториал) способов, или число перестановок из пяти. Итак, есть много ситуаций, когда конкретных прекрасных людей или вещей можно заменить числами, и рассмотреть множество этих чисел. Математикам этого вполне достаточно☺. Причем в зависимости от целей, каждого можно заменять разными числами. Если нас интересует, не находится ли он в розыске, мы его заменим на номер его паспорта, а если нас интересует, выдержит ли лифт, мы каждого заменим на его вес. Иногда, правда, натуральных и прочих чисел не хватит даже математикам, и тогда они вынуждены рассматривать более общие объекты. Например, векторы (это когда кроме количества мест, которые потребуют элементы нашего множества, важно, допустим, учитывать группу крови, температуру, возраст, оценки по математике и физике в конце концов, да мало ли чего еще, рост и вес, то есть вместо одного параметра надо учитывать несколько, появляется размерность, число этих важных параметров, в моем примере вместо N чисел для описания студентов вашей группы потребуется N семимерных векторов, то есть векторов в пространстве размерности 7). Или не числа и не векторы, а множества точек (геометрические объекты), например, фотография или отпечатки пальцев. Отпечаток пальца это такое множество, которое (якобы) полностью определяет человека, то есть соответствует ему взаимно однозначно. У каждого он есть и у разных людей не может быть одинаковых отпечатков. В этом смысле каждого человека можно заменить его отпечатком. И множество этих геометрических объектов (отпечаток есть множество точек на определенном кусочке плоскости) тогда

эквивалентно множеству всего населения планеты. Итак, мы будем рассматривать некие объекты, составляющие те или иные множества. Объекты тогда будем называть элементами этих множеств. Далее, чтобы получать свойства, нас интересующие, мы должны знать первичные самые общие свойства, называемые аксиомами. Все остальные свойства нам придется выводить логическим путем из этих первичных свойств, или аксиом. И еще нам придется различать неопределимые понятия, такие как точка или множество, от понятий, требующих определения, например, прямая. Прямая в отличие от точки – это не первичный объект, прямая сама является множеством точек. Но не любым, а таким, что существует некоторая точка M и некоторый вектор $\vec{a}$, которые определяют нашу прямую *l* так: точка P принадлежит нашей прямой *l* тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{MP} \parallel \vec{a}$. В кванторах это определение выглядит короче:

$$\exists M, \vec{a} : l = \left\{ P : \overrightarrow{MP} \| \vec{a} \right\}.$$



(от точного «перевода» - ***«существуют точка M и вектор a такие, что множество l есть множество таких точек P, что*** $\overrightarrow{MP} \| \vec{a}$ » лучше научиться переходить к более вольному: ***«для некоторых точки M и вектора*** $\vec{a}$ ***прямая l есть множество всех точек P, обладающих свойством*** $\overrightarrow{MP} \| \vec{a}$ ***».***)

Итак, определение нужно, когда требуется различать объекты, удовлетворяющие этому определению, от остальных. И тогда такие объекты сами составляют множество. Например, множество прямых в пространстве. А признаком, определяющим это множество, является: $\exists M, \vec{a} : l = \left\{ P : \overrightarrow{MP} \| \vec{a} \right\}$.

Если не перечислены определяющие свойства, то множество *A* может быть каким угодно, каждое следующее свойство из определения сужает круг множеств, подходящих под это определение. Может случиться, что в определении содержатся несовместимые свойства, тогда оно определит пустое множество (в котором не содержится никаких элементов). Но все остальные свойства, которые имеет это множество, и которые не перечислены в определении, нами должны быть выведены из свойств, содержащихся в определении. Теперь рассмотрим базовый объект нашего предмета – множество действительных чисел. Поскольку речь идёт об аксиоматическом введении этого в общем-то многим знакомого множества, сразу отметим, чтобы не было путаницы. Реальное содержание этого множества, которое мы привыкли считать его определением – сейчас временно забудем.

Потому что нам его вводили как? Не математически, а антологически: сначала рассказали, что первыми люди узнали натуральные числа, когда им пришлось что-то пересчитывать. Поэтому они стали всем этим объектам давать номера, по сути, ставить их во взаимно однозначное соответствие с некоторым подмножеством множества натуральных чисел. Но они об этом множестве ничего не знали, потому что сначала им хватало «один, два, много…», потом понадобилось три, четыре и так далее. Как из этого можно получить определение множества натуральных чисел? Ведь это множество – абстракция (от качеств, или физических свойств, когда все равно, три коровы или три удара по голове), то есть типичный математический объект. Поэтому определение его должно быть внутри этого мира абстракций, а не через пересчет коров или ботинок. И тут нам будет трудно, пока мы не поймем то общее свойство, которое привело к возможности пересчитывать свою наличность независимо от размеров своего богатства. Тут главное – это многоточие, которое древние люди правильно обозначали словом «много» после двух. Как раз неважно, после двух, трех, или триста тридцати трех поставить это усталое «много» и бросить считать. В этом – главное свойство, а значит и ключ к определению множества натуральных чисел. Можно считать, что оно звучит так: **множество натуральных чисел – это наименьшее подмножество всех чисел, которое содержит число 1, и обладает тем свойством, что если ему принадлежит некоторое число a, то ему также будет принадлежать и число a+1**. Вот и все, этим мы полностью определили множество натуральных чисел, которое записывается в виде бесконечной строчки {1,2,3,…,n,…}. Причём дать определение этой строчкой – это не будет математически строго, ну правда, пусть вам надо объяснить жителю другой галактики, что такое натуральные числа. А объяснить ему, зачем в определении натуральных чисел мы пишем 2, а не, например, ≺ или ⊬ на втором месте, и как это связано с понятием натурального числа - вряд ли получится. Если же каким-нибудь образом передать ему информацию, выделенную жирным шрифтом, то он точно будет знать, что такое мы понимаем под множеством натуральных чисел, даже если для них в его галактике другие кракозябры. Вот примерно, что должен осознавать студент, когда ему кажется, что он знает определение математического понятия, а математикам так не кажется. Примерно то же самое относится и к доказательствам, потому что математика – это универсальный язык всех наук, описывающих все явления нашего мира – поэтому именно на нем мы сможем поговорить с любым разумным существом из любого его уголка.

Итак, попытаемся определить множество вещественных чисел. Опять же сразу отметим: очень плохой идеей будет сказать, что это всякие такие штуки типа 1, или 13, или 1,2 или 1,33 или в худшем случае 137,9876567876…. Тут бедный инопланетянин придет в полное недоумение. Уже одно то, что у нас так много (или мало) цифр – а именно 10 – будет непонятно. Догадайтесь, почему?

Подсказка: потому что, скорее всего у них там не по пять пальцев на каждой руке, да и есть ли пальцы вообще, и рук неизвестно сколько. Продвинутый студент скажет, что мы им напишем все это в двоичной системе. Это даже для натурального ряда будет симпатичненько: {1; 1+1=10; 1+1+1=11; 1+1+1+1=100, а уж 25 - догадайтесь сами, какой длины} – кстати, всем, кто уже легко умеет, или понял, или не понял – уметь к экзамену виртуозно выписывать любое натуральное число хотя бы до 33 в двоичной системе. Итак, можно сказать, что это набор из 0 и 1, записанных в любом порядке, причем он возможно справа не ограничен, и где-то может быть запятая. Тогда есть какой-то шанс, что инопланетяне догадаются, что речь идет о вещественных числах (потому что это их запись в самой простой позиционной системе, а «есть» или «нет», или «включено» - «выключено», закодированные 1 и 0, они должны понимать независимо от числа щупалец или присосок), хотя математически в таком определении ничего хорошего не будет. Почему? Да потому, что, как уже говорилось, математическое определение дает возможность работать с этим множеством, изучать его свойства, делать выводы, при помощи которых спутник не промахнется и достигнет Луны, а ядерный реактор не взорвется, а будет давать энергию. А все предыдущие попытки абсолютно бесполезны в плане вывода каких-либо новых свойств этого множества. Итак, нам не помогло умение записывать эти числа, известное нам из практики. Потому что с этого конца – кто такие эти числа, эти абстрактные объекты, нам не пробиться. Поэтому начнем с совершенно другого конца – примерно как в детективах, допустим, Шерлок Холмс или Эркюль Пуаро определяют, кто этот человек, которого разыскивают за то, что он сделал нечто. Сначала рассматривается абстрактное множество людей, которые могли бы это совершить, и выясняются всевозможные свойства элементов этого множества (подозреваемых). Каждое свойство - например, оставленные следы, или отсутствие алиби, или наличие мотивов, или физическая возможность совершить это, сужает круг (выделяет подмножество) этого множества. Потом берется то подмножество, которое обладает всеми свойствами (пересечение всех подмножеств). Так и определяется нужный человек. А не тем, что его зовут Иван Иваныч Иванов. Имя он может и поменять. Все сказанное должно помочь понять, что название или имя – никак не определение, а просто нужно, чтобы как-то об этом объекте говорить. Так же, как некоторые люди вдруг меняют свое имя, мы не должны путаться, если придется переименовать какой-нибудь объект.

Итак, рассмотрим некоторое множество, которое будем называть - множество вещественных чисел, соответственно его элементы – называем вещественными числами, также будем обозначать это множество (дадим ему короткое имя) - $\mathbb{R}$. Что же это за множество?

Наконец, заметим, что в определении используется важное понятие операции. Имеется в виду бинарная операция, то есть закон соответствия, который любым двум элементам множества ставит в соответствие единственный третий, он же и есть результат операции.

Определение: Множество **с двумя определенными на нем операциями** (будем называть их сложением и умножением) будет называться **множеством вещественных чисел** (и обозначаться в дальнейшем $\mathbb{R}$) , а его элементы вещественными числами, если выполнены следующие **свойства** (называемые аксиомами):

1 группа аксиом (аксиомы сложения) :

в $\mathbb{R}$ определена операция (называемая сложением), то есть $\forall a,b \in \mathbb{R}$ (*любым двум элементам a,b из множества $\mathbb{R}$*) однозначно соответствует некоторое $d \in \mathbb{R}$, этот элемент *d* будем обозначать $d = a + b$, причем

1. $\forall a,b \in \mathbb{R} \quad a+b=b+a$ (**коммутативность**)
2. $\forall a,b,c \in \mathbb{R} \quad (a+b)+c=a+(b+c)$ (**ассоциативность**)
3. **существование нейтрального элемента:**

   $\exists e \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} \quad a+e=e+a=a$ (***Во множестве $\mathbb{R}$ существует такой элемент e, что для любого элемента a множества $\mathbb{R}$ выполняется соотношение: $a+e=e+a=a$)***

   Такой элемент называется нейтральным (относительно сложения). Будем обозначать его 0.

(Заметим попутно, что кусочек «$\forall a \in \mathbb{R}$» можно «переводить» разными способами, например, «***для любого a, принадлежащего множеству $\mathbb{R}$***», **или проще,** «***для любого a из $\mathbb{R}$***», **или** «***для любого вещественного числа a***»)

4. **существование обратного элемента для любого вещественного числа:**

   $\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists a' \in \mathbb{R} : \quad a+a'=a'+a=0$ (***для любого вещественного числа a найдется такое число a' , что $a+a'=a'+a=0$)***

   Будем обозначать обратный элемент «*–a*».

2 группа аксиом (аксиомы умножения) :

в $\mathbb{R}$ определена операция (называемая умножением), то есть $\forall a,b \in \mathbb{R}$ однозначно соответствует некоторое $f \in \mathbb{R}$, будем обозначать его $f = a \cdot b$ (знак умножения, как мы привыкли, можно опускать), **причем**

5. $\forall a,b \in \mathbb{R} \quad ab = ba$ **(коммутативность)**

6. $\forall a,b,c \in \mathbb{R} \quad (ab)c = a(bc)$ (**ассоциативность**)

7. $\exists e \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \quad ae = ea = a$ **(существование нейтрального элемента). Будем обозначать этот элемент 1**.

8. $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \quad \exists a' \in \mathbb{R} : \quad a \cdot a' = 1$ **(существование противоположного элемента для *a*). Будем обозначать противоположный элемент a^{-1}.**

Кроме того,

9. $\forall a,b,c \in \mathbb{R} \quad a(b+c) = ab + ac$ (**дистрибутивность**).

3 группа аксиом (аксиомы порядка) :

в $\mathbb{R}$ определено отношение порядка, обозначаемое $\leq$, то есть
$\forall a,b \in \mathbb{R} \quad (a \leq b) \vee (b \leq a)$ (***для любых вещественных чисел a и b либо $a \leq b$, либо $b \leq a$*** **)** ,
причем

10. $\forall a \in \mathbb{R} \quad a \leq a$ (**рефлексивность**)

11. $(a \leq b) \wedge (b \leq a) \Rightarrow a = b$ (**антисимметричность**)

12. $\forall a,b,c \in \mathbb{R} \quad (a \leq b) \wedge (b \leq c) \Rightarrow a \leq c$ (***для любых трех вещественных чисел a, b и c из $a \leq b$ и $b \leq c$ вытекает $a \leq c$***) (**транзитивность**).

При этом еще 2 аксиомы связывают операции сложения и умножения с отношением порядка: $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$

13. $(a \leq b) \Rightarrow a + c \leq b + c$

14. $(a \geq 0) \wedge (b \geq 0) \Rightarrow ab \geq 0$.

Из этих аксиом можно вывести как следствия все известные правила арифметики (дальше будет показано, как). Заметим сразу, что благодаря именно аксиомам порядка, которые обеспечивают так называемую линейную упорядоченность множества вещественных чисел, нам известна такая модель этого множества, как числовая прямая (означающая взаимно-однозначное соответствие элементов множества $\mathbb{R}$ и точек на прямой). Потому что упорядоченность позволяет все вещественные числа расположить по типу людей в

очереди: каждые два знают, кто из них стоит раньше, а кто позже. Также и числа можно расположить по возрастанию, поскольку каждые два числа «знают, кто из них меньше или равен другого». Противоположная ситуация будет у множеств, не обладающих линейной упорядоченностью. Что это значит? Отрицание аксиомы порядка таково: «найдутся два таких элемента, которые нельзя сравнить». Таковы, например, двумерные векторы, или комплексные числа. Поэтому они располагаются на плоскости, точки которой мы не можем упорядочить (выстроить по старшинству).

Удобной для иллюстрации моделью числовой прямой, с которой все уже освоились в школе, будем пользоваться (не занимаясь деталями ее обоснования).

Заметим еще, что отношение порядка участвует в аксиоматике в виде нестрогого неравенства «≤», из чего следует определенность неравенства «≥»: $a \geq b \Leftrightarrow b \leq a$. Но про строгое неравенство пока ничего не говорилось. С этим легко справиться, не добавляя никаких новых аксиом:

Определение: $(x < y) \Leftrightarrow (x \leq y) \wedge (x \neq y)$. Очевидно, теперь также определено строгое неравенство «>»). Тогда аксиомы 13 и 14 можно применять и для строгих неравенств, но уже не как аксиомы, а как их следствия, в виде:

13'. $(a < b) \Rightarrow a + c < b + c$. ◄ Действительно,
$(a < b) \Leftrightarrow (a \leq b) \wedge (a \neq b) \Rightarrow (a + c \leq b + c) \wedge (a + c \neq b + c) \Rightarrow a + c < b + c$ ►

14'. $(a > 0) \wedge (b > 0) \Rightarrow ab > 0$. Доказательство можно будет привести после следствия 8 из следующего параграфа (сделать самостоятельно).

После этого можно говорить о положительных, отрицательных числах (сравнивая каждое с 0).

Но все эти аксиомы не сузили еще «круг подозреваемых» до множества вещественных чисел. Дело в том, что такими же свойствами обладает, например, его «небольшое» подмножество – множество рациональных чисел. Однако там не удастся построить важнейшее понятие предельного перехода, так как у множества рациональных чисел есть серьезное отличие от множества вещественных чисел – оно не обладает свойством непрерывности или континуальности, которое обеспечивает последняя аксиома -

Аксиома полноты

Для любых двух множеств $X \subset \mathbb{R}, Y \subset \mathbb{R}$, таких что $\forall x \in X, \forall y \in Y \Rightarrow x \le y$, существует $c \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y$ $x \le c \le y$.

Растолкуем, что же в ней сказано. Пусть есть два множества *X* и *Y* вещественных чисел (они оба – подмножества множества всех вещественных чисел $\mathbb{R}$), таких, что каждый элемент первого множества *X* меньше любого элемента второго множества *Y*. На числовой прямой это будет означать вот такое их расположение:

В аксиоме утверждается, что тогда найдется число c, «разделяющее» эти два множества в смысле, что для любого *x* из *X* и любого *y* из *Y* будет выполнено $x \le c \le y$

Почему же для множества рациональных чисел эта аксиома не выполняется? Легко привести пример: возьмем число корень из двух (или пи), в дальнейшем мы вспомним доказательство того факта, что это число не рациональное. X составим из его десятичных приближений по недостатку (отбрасывая бесконечный «хвост» с n-го места), а Y – по избытку (беря соответствующий последний оставленный знак на единицу больше). Конечные десятичные дроби есть числа рациональные. Множества удовлетворяют требованиям аксиомы. Однако единственное разделяющее их число – само корень из двух, и оно не принадлежит множеству рациональных чисел. Такой «недостаток» множества рациональных чисел делает невозможным построить понятие предела в этом множестве.

§2. Следствия аксиом 1-14.

Итак, проиллюстрируем на нескольких важных примерах, как выводятся все правила арифметики и действий с неравенствами из первых 14 аксиом.

Докажем, что:

1. 0 единственен. ◄ Пусть есть другой нейтральный элемент по сложению 0_1. Тогда по определению нейтрального элемента (аксиома 3) : $0 = 0 + 0_1 = 0_1$. ►

2. Для $\forall x \in \mathbb{R}$ $(-x)$ единственен. ◄ Пусть есть другой обратный элемент x_1. Тогда по аксиомам 1-4 : $x_1 = x_1 + 0 = x_1 + (x + -x) = (x_1 + x) + -x = 0 + -x = -x$ ►

3. 1 единственна. (Доказать самостоятельно.)

4. Для $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 0,\ x^{-1}$ единственен. (Доказать самостоятельно.)

5. Для $\forall a, b \in \mathbb{R}\ \exists! x : a + x = b$ ◄ Если такой элемент существует, то он может иметь единственный вид: $x = b + (-a)$. Действительно, к обеим частям равенства $a + x = b$ прибавим (- *a*): $-a + a + x = -a + b \Leftrightarrow x = b + (-a)$ (здесь использовались последовательно аксиомы 2, 4 и 1..Подставив такое x в уравнение $a + x = b$, убеждаемся, что это – его решение, а его единственность вытекает из единственности обратного элемента. ► **Будем называть такой *x* разностью *a* и *b* и обозначать *a-b.***

6. Для $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0,\ \exists! x : a \cdot x = b$. (Доказать самостоятельно.) **Будем называть такое *x* частным *a* и *b* и обозначать** $\frac{a}{b}$.

7. $\forall x \in \mathbb{R}\quad x \cdot 0 = 0$.

. ◄ $x \cdot 0 = x \cdot 0 + (x + -x) = (x \cdot 0 + x) - x = (x \cdot 0 + x \cdot 1) - x = x(0 + 1) - x = x - x = 0$ ►

8. $(x \cdot y = 0) \wedge (x \neq 0) \Rightarrow y = 0$ ◄ $x \neq 0 \Rightarrow \exists x^{-1} \Rightarrow$ умножим обе части первого равенства на $x^{-1} \Rightarrow x^{-1} \cdot (x \cdot y) = (x^{-1} \cdot x) \cdot y = 1 \cdot y = y$ - левая его часть, а правая: $x^{-1} \cdot 0 = 0$.►

9. $-x = (-1) \cdot x$ ◄ $x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + -1)x = 0 \cdot x = 0$, откуда следует, что $(-1) \cdot x$ является обратным элементом для x, в силу единственности обратного элемента равенство $-x = (-1) \cdot x$ доказано.►.

10. $x > y \Leftrightarrow -x < -y$ ◄По свойству 13’
$x > y \Leftrightarrow (x + -x > y + -x = y - x) \Leftrightarrow (0 > y - x) \Leftrightarrow 0 + -y > -y + y - x \Leftrightarrow -y > -x$ ►

11. В частности, $x > 0 \Leftrightarrow -x < 0$

12. А также легко получить, добавив случай равенства:

$x \geq y \Leftrightarrow -x \leq -y$

13. а) $(x \geq 0) \wedge (y \leq 0) \Rightarrow xy \leq 0$

б) $(x>0)\wedge(y<0)\Rightarrow xy<0$

в) $(x\le 0)\wedge(y\le 0)\Rightarrow xy\ge 0$

г) $(x<0)\wedge(y<0)\Rightarrow xy>0$

◄Докажем только а). Из предыдущего $y\le 0\Leftrightarrow -y\ge 0\Rightarrow x(-y)\ge 0$ Но по следствиям 10 и 9 $x(-y)=x(-1)y=-1\cdot(xy)=-xy\ge 0\Leftrightarrow xy\le 0$ ►

14. Аксиома ($(x\ge 0)\wedge(y\ge 0)\Rightarrow xy\ge 0$) равносильна другому известному неравенству, на которое ее можно таким образом заменить:
($(x\ge z)\wedge(y\ge 0)\Rightarrow xy\ge zy$) ◄Докажем «$\Rightarrow$», то есть что из первого следует второе. Если выполнено $(x\ge 0)\wedge(y\ge 0)\Rightarrow xy\ge 0$, то для любых *x* и *z*, таких что $x\ge z\Rightarrow x+(-z)=x-z\ge z+(-z)=0$ по аксиоме 13. Тогда
$(x-z\ge 0)\wedge(y\ge 0)\Rightarrow(x-z)y\ge 0\Rightarrow xy-zy\ge 0\Rightarrow$ опять прибавив по свойству 13 к обеим частям *zy*, получим требуемое соотношение. Докажем «$\Leftarrow$», то есть что из второго следует первое. Если выполнено второе соотношение, то есть при всех *x* и *z*, таких что $(x\ge z)\wedge(y\ge 0)\Rightarrow xy\ge zy$, то возьмем
$z=0\Rightarrow(x\ge 0)\wedge(y\ge 0)\Rightarrow xy\ge 0\,y=0$ ►

Отсюда также следует «строгий» вариант: $(x>z)\wedge(y>0)\Rightarrow xy>zy$.

15. **0<1** ◄ Предположим противное: $1\le 0$. Тогда по следствию 13 в)
$\mathbf{(1\le 0)\wedge(1\le 0)\Rightarrow 1\cdot 1\ge 0}$. Причем, если бы в аксиоме 7 не предполагалось, что $1\ne 0$, мы не смогли бы этого доказать, так как никаким другим аксиомам не противоречит тот факт, что 0=1 (просто из него следует, что никаких других элементов кроме 0 во множестве нет). Таким образом, имеем $\mathbf{(1\ge 0)\wedge(1\ne 0)\Rightarrow 1>0}$, что привело к противоречию.►

16. $(x>0)\Rightarrow x^{-1}>0$ ◄ Предположим противное:. $x^{-1}\le 0\Rightarrow$ по следствию 13 а)
$\mathbf{(x>0)\wedge(x^{-1}\le 0)\Rightarrow x\cdot x^{-1}\le 0\Leftrightarrow 1\le 0}$ пришли к противоречию с предыдущим следствием. ►

17. $0<x<y\Rightarrow x^{-1}>y^{-1}>0$
◄ $\mathbf{(x<y)\wedge(x^{-1}>0)\Rightarrow x\cdot x^{-1}<y\cdot x^{-1}\Rightarrow 1<yx^{-1}}$ по следствию 9, и аналогично $\mathbf{(1<yx^{-1})\wedge(y^{-1}>0)\Rightarrow 1\cdot y^{-1}<y^{-1}\cdot y\cdot x^{-1}=x^{-1}}$ ►

18. Правило приведения к общему знаменателю: $\frac{x}{y}+\frac{u}{v}=\frac{xv+yu}{yv}$

$\blacktriangleleft \frac{x}{y}+\frac{u}{v} \equiv y^{-1}x+v^{-1}u = yy^{-1}vv^{-1}(y^{-1}x+v^{-1}u) =$

$= y^{-1}v^{-1}\left(yvy^{-1}x+yvv^{-1}u\right) = y^{-1}v^{-1}\left(vx+yu\right)$, что и является правой частью. ►

Мы часто будем пользоваться так называемым **неравенством треугольника**: предварительно дав определение модуля числа, докажите самостоятельно:

18. $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |x+y| \le |x|+|y|$

§3. Натуральные числа. Принцип математической индукции. Бином Ньютона.

Во множестве $\mathbb{R}$ выделяются важные подмножества: $\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ - множество целых чисел, $\mathbb{Q}$ - множество рациональных чисел. Поскольку мы определяем вещественные числа набором аксиом, определить эти множества тоже следует, исходя из предыдущего списка аксиом и выведенных из них следствий. Сложность заключается в том, что мы заново определяем объекты, хорошо нам знакомые как пользователям, поэтому иногда возникает соблазн пользоваться теми свойствами, которые еще не выведены, но кажутся нам очевидными. Например, неограниченность множества натуральных чисел и тем более степеней 2 не вызывает ни у кого сомнения. Однако при доказательстве принципа Архимеда нам придется это вывести из аксиом. Желательно представлять себе все стадии трудоемкого процесса строгого вывода из аксиом всех используемых свойств вещественных чисел вплоть до записи их в виде бесконечных десятичных дробей.

Определение 1 . **Множеством натуральных чисел** $\mathbb{N}$ будем называть минимальное числовое множество, которое содержит 1 и вместе с любым элементом n содержит также и n+1. (Под минимальным мы понимаем пересечение всех множеств, обладающих таким свойством).

Из этого определения вытекает **метод математической индукции.** Он используется тогда, когда надо установить некоторое свойство А для всех натуральных чисел. Суть метода:

а) проверяется, что свойство А выполнено для n=1 ,

б) доказывается, что если свойство A имеет место для некоторого натурального числа *n*, то оно выполнено и для *n*+1 .

Тем самым утверждение оказывается доказанным для всех натуральных чисел.

Пример 1. Определим функцию натурального аргумента $n!$ (читается « **n-факториал**») по индукции:

а) 1!=1

б) пусть для некоторого *n* нам известно значение $n!$. Тогда положим $(n+1)! = (n+1)\cdot n!$

Таким образом можно получить последовательно: 1!=1, $2! = 2\cdot 1 = 2$,
$3! = 3\cdot 2! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$, ..., $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$, то есть $n!$ - это произведение всех натуральных чисел от 1 до самого *n*.

Нам еще понадобится иногда, чтобы был определен факториал и для 0 - по определению будем считать, что 0!=1.

Пример 2.

Более серьезный пример представляет собой доказательство **Бинома Ньютона:**

Доказать, что $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$ ***, где*** $C_n^k \equiv \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Знак $\sum_{k=0}^{n} x_k$ означает суммирование слагаемых x_k для всех значений *k* от 0 до *n* (всего *n*+1 слагаемое). Например, для *n*=2 получаем:

$\sum_{k=0}^{2} C_2^k a^{2-k} b^k = C_2^0 a^2 b^0 + C_2^1 a^1 b^1 + C_2^2 a^0 b^2$. Учитывая, что

$C_2^0 = \frac{2!}{0!2!} = 1, C_2^1 = \frac{2!}{1!1!} = 2, C_2^2 = \frac{2!}{2!0!} = 1$, видим, что это просто сокращенная запись известной всем формулы квадрата суммы $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Еще обратим внимание на то, что в биноме используется понятие натуральной (и нулевой) степени. Так что на этот момент надо самостоятельно вывести из аксиом всю последовательность определений и свойств неотрицательной целой степени (это совпадет с изложением по школьному учебнику).

Сведем наше утверждение к

Варианту **Бинома Ньютона:** $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$.

Эти две формулы равносильны при $a \neq 0 : (a+b)^n = a^n \left(1+\frac{b}{a}\right)^n$, так что одна получится из другой домножением на a^n . Разницы при доказательстве никакой нет, но уменьшение числа переменных делает его более наглядным. Кроме того, вторая форма гораздо чаще применяется.

◄Проверим для *n*=1: $(1+x)^1 = 1+x$. По приведенной формуле должно быть в правой части $\sum_{k=0}^{1} C_1^k x^k$, в этой сумме *k* принимает всего два значения: *k*=0 и *k*=1.

При *k*=0 $C_1^0 = \frac{1!}{0!(1)!} = 1$, при *k*=1 $C_1^1 = \frac{1!}{1!(0)!} = 1$. Так что получается $\sum_{k=0}^{1} C_1^k x^k = 1+x$.

Пусть формула верна для *n*. Тогда для *n*+1:

$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n = (1+x)\cdot\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$ Раскроем скобки (аксиома 9):

$$(1+x)\cdot\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k + x\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{k+1}$$

Теперь надо привести подобные члены. Для этого заметим, что *k* под знаком суммирования является просто счетчиком и в первой и второй суммах не зависят друг от друга. Поэтому сменим «счетчик» во второй сумме: вместо *k* введем другой: $k' = k+1$. Вторая сумма приведется к виду:

$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{k+1} = \sum_{k+1=1}^{n+1} C_n^{(k+1)-1} x^{k+1} = \sum_{k'=1}^{n+1} C_n^{k'-1} x^{k'}$ и, так как в обеих суммах счетчики не зависимы, после этого можно переименовать k' в *k* и привести подобные:

$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} x^k = C_n^0 x^0 + \sum_{k=1}^{n} x^k \left(C_n^k + C_n^{k-1}\right) + C_n^n x^{n+1}$. Очевидно,

$C_n^0 = C_n^n = 1 = C_{n+1}^0 = C_{n+1}^{n+1}$.

Осталось показать, что $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$. Это несложно:

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} = \frac{n!((n-k+1)+k)}{k!(n-k+1)!} =$$

$$= \frac{n!(n+1)}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k .$$ Итак, правая часть теперь имеет вид

$C_{n+1}^0 x^0 + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k x^k + C_{n+1}^{n+1} x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^k$. Значит, формула верна и для n+1. ►

В дальнейшем мы будем пользоваться таким выражением $C_n^k = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$,

получающимся после сокращения :

$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)\cdots 2\cdot 1}{(n-k)\cdots 2\cdot 1} = n(n-1)...(n-k+1)$. Это выражение проще запоминать как произведение k натуральных чисел, идущих по убыванию, начиная с n.

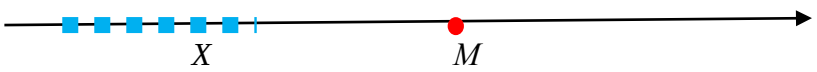
Обозначим $\mathbb{N}^- \equiv \{m : m = -n, n \in \mathbb{N}\}$, то есть множество обратных ко всем натуральным чисел. Тогда

Определение 2 . Множество целых чисел $\mathbb{Z} \equiv \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}^-$.

Определение 3 . Множество рациональных чисел $\mathbb{Q} \equiv \left\{ \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$.

§4. Аксиома полноты и следствия из нее (полнота или непрерывность числовой прямой). Понятие точной верхней грани. Лемма о точной верхней грани.

Определение 1. Множество $X \subset \mathbb{R}$ назовем ограниченным сверху, если $\exists M \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall x \in X \Rightarrow x \le M$.



Замечание: для краткости с этого момента все множества и их элементы предполагаются по умолчанию принадлежащими $\mathbb{R}$, если не указано иное, то есть, например, вместо $\exists M \in \mathbb{R}$ пишем просто $\exists M$

Определение 2. Множество $X \subset \mathbb{R}$ назовем ограниченным снизу, если $\exists M$ такое, что $\forall x \in X \Rightarrow x \ge M$

Определение 3. Число M для множества X из предыдущих определений называется верхней (или соответственно нижней) границей.

Определение 4. Множество $X \subset \mathbb{R}$ назовем ограниченным, если $\exists M$ такое, что $\forall x \in X \Rightarrow |x| \le M$.

Ясно, что множество ограниченно $\Leftrightarrow$ оно ограничено и сверху, и снизу.

Определение 5. Число $a \in A$ для множества A называется максимальным (минимальным) элементом, если $\forall x \in A \Rightarrow x \le a \quad (x \ge a)$.

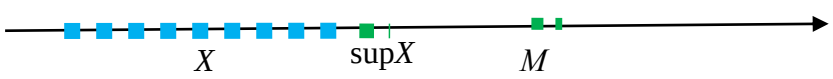
Итак, *a* является максимальным элементом A $\Leftrightarrow$ *a* является верхней границей *A* и при этом его элементом.

Аналогично самостоятельно дайте определение минимального элемента.

Примеры: множество (0,1) не имеет минимального и максимального элементов, а [0,1] – имеет минимальный и максимальный элементы. Хотя для обоих 0 и 1 являются соответственно нижней и верхней границами.

Утверждение. Если у некоторого множества существует минимальный (максимальный) элемент, то он единственен. ◄ Докажем для минимального (случай максимального рассматривается аналогично). Предположим противное: кроме *c* - минимального $\exists c_1$ - другой минимальный элемент у некого множества. Тогда для каждого элемента *x* этого множества имеет место $(x \ge c) \wedge (x \ge c_1)$. Но тогда $(c_1 \ge c) \wedge (c \ge c_1) \Rightarrow c = c_1$. ►

Определение 5. Минимальный элемент множества всех верхних граней для множества X называется **точной верхней гранью** множества X и обозначается $\sup\limits_x x$ или просто $\sup X$.(читается «супремум»).



Первое важное следствие из аксиомы полноты:

Лемма о точной верхней грани.

Всякое непустое ограниченное сверху множество в $\mathbb{R}$ имеет точную верхнюю грань, причем единственную.

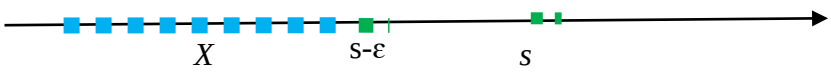
◄Нам надо доказать существование и единственность точной верхней грани. Первое означает, что всегда множество всех верхних границ ограниченного сверху непустого

множества имеет минимальный элемент. Действительно, рассмотрим такое множество X и обозначим множество всех его верхних границ через *A*. Оба они не пусты, так как в *A* содержится хотя бы одно число (см. определение 1). Для $\forall x \in X, \forall a \in A \Rightarrow x \le a$. Поэтому выполнены условия аксиомы полноты и существует число *s* такое, что $\forall x \in X, \forall a \in A \Rightarrow x \le s \le a$. Из этого соотношения видно, что *s* также является верхней границей X и, следовательно, принадлежит *A*. Из того же соотношения следует, что оно является его минимальным элементом. Единственность минимального элемента уже доказана. ►

Точная верхняя грань отличается от всех других верхних граней одним очень важным **свойством:**

Утверждение. Пусть $s = \sup X$ Тогда $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in X : s - \varepsilon < x \le s$.

◄ От противного: если $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in X \quad x \le s - \varepsilon$, то это означает, что $s - \varepsilon$ также является верхней гранью множества X :



Что противоречит тому, что *s* минимальный элемент среди верхних граней. ►

Самостоятельно дайте определение и докажите все соответствующие свойства для **точной нижней грани** ограниченного снизу непустого множества. Обозначается она

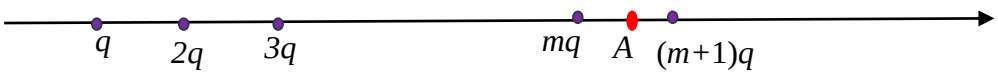
$\inf\limits_{x} x$ или просто $\inf X$ (читается «инфимум»).

§5. *Принцип Архимеда.*

Сформулируем общий случай **принципа Архимеда:**

Для любого числа A и любого $q > 0$ найдется такое целое число *m*, что

$mq \le A < (m+1)q$



Докажем его для случая $A \ge 0$ и $q = 1$: то есть что

Для любого $A \ge 0$ найдется натуральное число *n* такое, что $n - 1 \le A < n$.

◄Рассмотрим множество всех чисел $n \in \mathbb{N}$, таких что $n \le A + 1$ (1). Обозначим его *E*. Оно не пусто, так как *n*=1 ему принадлежит. Оно ограничено сверху (A+1) и поэтому

имеет точную верхнюю грань, обозначим ее s. По свойству точной верхней грани найдется $n \in E$ такое, что $s-1 < n \le s$. Докажем, что $n > A$.

Если предположить противное, что $n \le A$, то $s-1 < n \le A$.

Прибавив ко всем частям 1, получим $s < n+1 \le A+1$, так что с одной стороны $n+1$ принадлежит E (по признаку (1)), а с другой оно больше точной верхней грани s этого множества, что невозможно. Итак, $n > A$, и для него выполнено (1), так что $A < n \le A+1$, что равносильно доказываемому. ►

Случаи произвольного $q > 0$ и A произвольного знака свести к рассмотренному самостоятельно (в первой формулировке взять $m = n-1 \in \mathbb{Z}$, взять вместо A $A_1 = \frac{A}{q}$).

Следствие 1.

Для любого $a > 0$ найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $0 < \frac{1}{n} < a$. ◄Для доказательства достаточно рассмотреть $A = \frac{1}{a}$ и применить принцип Архимеда: найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\frac{1}{a} < n \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < a$ ►

Следствие 2.

Для любых $b > a > 0$ найдутся $m, n \in \mathbb{N}$ такие, что $a < \frac{m}{n} < b$. ◄Для доказательства достаточно применить предыдущее следствие к $A = \min\{b-a, a\} > 0$: существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $0 < \frac{1}{n} < A \Rightarrow \left(\frac{1}{n} < a\right) \wedge \left(\frac{1}{n} < b-a\right)$. Пусть $q = \frac{1}{n}$ в принципе Архимеда: найдется $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такое, что $kq \le a < (k+1)q$. Но отсюда следует, что $a < (k+1)q < b$ (*) (звездочка это не сноска, о название неравенства). Доказать надо правую половину этого неравенства. Предположим противное: оно равносильно $(k+1)q \ge b$ и поэтому $kq \le a < b \le (k+1)q$. Из свойств неравенств, доказанных в §2, из этого следует $b-a \le (k+1)q - kq = q = \frac{1}{n}$, а это противоречит выбору n. Итак, неравенство (*) выполнено и осталось принять $k+1 \in \mathbb{N}$ за m. ►

На случаи a, b произвольных знаков все также распространяется.

Из этого следствия вытекает важное

Свойство рациональных чисел: между любыми двумя числами существует рациональное число. Это же можно выразить по-другому: в любой окрестности любого числа найдется рациональное число. (Определение окрестности точки будет дальше, это – любой интервал, содержащий эту точку).

В математике для такого свойства есть термин «всюду плотно». То есть множество $\mathbb{Q}$ **всюду плотно** в $\mathbb{R}$. Не путать со свойством полноты. Поскольку для множества $\mathbb{Q}$ аксиома полноты не выполняется (почему – доказывается далее), оно **не полно**.

И последнее

Следствие 3.

Для любого $a > 0$ найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $0 < \frac{1}{2^n} < a$.

◄Для доказательства достаточно показать верность неравенства $2^n > n$ для всех натуральных *n*. и применить следствие 1 принципа Архимеда и следствие 15 аксиом. Верность этого неравенства проверяется по индукции: при *n*=1 имеем 2>1, пусть это верно для *n*. Тогда $(2^n > n) \wedge (2^n > 1) \Rightarrow 2^n + 2^n = 2^{n+1} > n+1$ (свойство «складывать» два неравенства легко следует из аксиомы 13.) ►

§6. Позиционная система исчисления.

Речь идёт о десятичной или любая другой системе записи действительного числа.

Аналогично принципу Архимеда можно доказать следующее утверждение:

Утверждение. Для любого числа *A >0* и любого $q > 1$ найдется такое целое число *m*, что $q^m \le A < q^{m+1}$ (1).

Доказать утверждение самостоятельно (в точности воспроизведя доказательство принципа Архимеда, заменив операцию «+» на операцию умножения). При различных *q* получатся различные системы исчисления. Например, при *q* =2 получится двоичная запись числа, а при . *q* =10 наша привычная десятичная и т. д,

А именно: пусть, например, *q* =10 . Тогда возьмем любое число A>0 и найдем такое m, что $10^m \le A < 10^{m+1}$.

Это значит, что в разрядах выше *m* будут стоять нули. Запись числа начнется с разряда *m*. Например, проследим, как получается десятичная запись 345,678 числа A, имеющего такую запись. Для него такое число *m*, очевидно, равно 2: $100 \le A < 1000$

Что же за число будет стоять в разряде *m*? (в нашем примере это второй разряд, то есть сотни. Разрядная сетка слева от запятой, напомним, начинается с единиц, то есть коэффициента при нулевой степени 10, называем его нулевым разрядом, поэтому второй разряд соответствует третьему месту слева от запятой)

Для $p = 10^m$ найдется целое число *n*, такое что $np \le A < (n+1)p$ (принцип Архимеда), то есть $n10^m \le A < (n+1)10^m$, причем очевидно (в силу правой части (1)) $0 \le n < 10$, то есть n – цифра. Она то и будет стоять в *m*-том разряде.

Для рассматриваемого примера $3 \cdot 100 \le A < 4 \cdot 100$. Значит, первая значащая цифра, стоящая в разряде сотен, будет 3.

Далее, найдем, что будет стоять в (*m*-1)-м разряде.

Для этого найдем $A_1 = A - n10^m$. Если это нуль, все закончилось и дальше все нули, если не нуль, то берем $p = 10^{m-1}$ и находим, как и в предыдущем шаге, согласно принципу Архимеда для этого «шага» *p* такое целое число n_1, что $n_1 \cdot 10^{m-1} \le A_1 < (n_1+1)10^{m-1}$, и, поскольку опять $A_1 < 10^m$, то обязательно окажется n_1 <10 – снова цифра, она идет в разряд *m*-1.

В нашем примере будет на этом шаге $A_1 = A - n10^m = 345,678 - 300 = 45,678$, затем (поскольку $10^{m-1} = 10^1$), найдем, что $4 \cdot 10^{m-1} \le A_1 < 5 \cdot 10^{m-1}$.

$$A_2 = A_1 - n_1 \cdot 10^{m-1} = 45,678 - 4 \cdot 10 = 5,678 .$$

И так далее, включая дробную часть – там степени *m* будут отрицательные, так как каждый раз промежуток 10^m делится на следующем шаге на 10, то есть происходит переход от $p = 10^m$ к $p = 10^{m-1}$. И если на каком-то шаге остаток (то есть $A_1 = A - n10^m$) получится нуль, то десятичная запись (дробь) конечная (или число целое), а если этого не случится – то дробь бесконечная.

Так, у нас в нулевом разряде (единицы) получится 5, в -1-м (десятые) 6, и т. д. до -3-го – там будет 8. Потом получится $A_6 = 0,008 - 0,008 = 0$.

После введения позиционной записи числа следует обосновать все известные из школы правила действия с десятичными дробями. И далее следует убедиться, что двум различным числам соответствуют две разные десятичные записи. И проверить, всякой ли последовательности цифр и одной запятой отвечает некоторое вещественное число. Оказывается, что нет. При нашем алгоритме не получится, например, число 0,999999….. (почему?) – как и любое число, у которого, начиная с некоторого места, идут одни девятки. (Лучше попробовать доказать это самим, так как у Зорича это доказано в общем виде для любого *q*, не только 10, и будет сложновато разобрать - стр. 73).

Далее можно доказать (см. Зорич, стр. 73 , вас спрашивать доказательство не буду), что любая последовательность цифр с запятой где-то посередине, если у нее как угодно далеко встречаются цифры отличные от 9, соответствует некоторому вещественному числу.

Все это без труда распространяется на отрицательные числа.

Посмотрим на то, что происходило при получении десятичной записи числа, еще немного. Наверное, вы заметили, что алгоритм состоит из повторяющегося цикла из двух шагов. На первом шаге мы определяем первую значащую цифру *n*, установив оценку $n \cdot 10^m \le A < (n+1)10^m$. На следующем – переходим к следующему (младшему) разряду, «отбрасывая» эту цифру – когда делаем вычитание: $A_1 = A - n \cdot 10^m$. И так дальше. На одном шаге мы определяем цифру на следующей позиции, устанавливая оценку вида $n_i \cdot 10^{m-i} \le A_i < (n_i + 1)10^{m-i}$, а на втором «отбрасываем» соответствующую цифру n_i из записи числа: $A_{i+1} = A_i - n_i \cdot 10^{m-i}$. Таким образом, A_i является «*i*-м остатком», получающимся, если из числа *A* вычесть последовательно $n \cdot 10^m$, $n_1 \cdot 10^{m-1}$, $n_2 \cdot 10^{m-2}$ и т. д. до номера *i* , что в десятичной записи соответствует «отбрасыванию» цифр, стоящих на первых i позициях. Из этого неравенства: $n_i \cdot 10^{m-i} \le A_i < (n_i + 1)10^{m-i}$ видно, что этот «*i*-й остаток» не превышает $10 \cdot 10^{m-i} = 10^{m-i+1}$ (поскольку $(n_i + 1) \le 10$).

Все это дает нам право говорить о приближении числа на основе его десятичной записи. Действительно, если в десятичной записи числа *x* заменить все цифры справа после первых i нулями, и полученное число обозначить x_1 , то разность этих двух чисел как раз и будет «*i*-м остатком». Поэтому справедлива оценка $0 \le x - x_1 < 10^{m-i+1}$. Число справа называется абсолютной погрешностью, а x_1 тогда называется десятичным

приближением числа x с абсолютной погрешностью 10^{m-i+1} , или еще говорят, с точностью до 10^{m-i+1}.

Например, у числа 0, 1234567 , у которого первый значащий разряд m= -1, заменив нулями всё, что стоит после третьей значащей цифры (i =3) , получим число 0,123, которое является приближением, погрешность которого должна быть меньше $10^{m-i+1} = 10^{-1-3+1} = 10^{-3}$. Действительно, 0, 1234567 - 0,123=0,0004567<0,001= 10^{-3}.

В конце заметим, что полученный алгоритм означает, что число является суммой

$A = n \cdot 10^m + n_1 \cdot 10^{m-1} + n_2 \cdot 10^{m-2} \ldots n_m \cdot 10^0 + n_{m+1} \cdot 10^{-1} + \ldots$, и его десятичная запись тогда: $n\, n_1 n_2 \ldots n_m , n_{m+1} \ldots$,

причем многоточие означает, что, возможно, 0 не получится ни на каком шаге, и тогда число записывается бесконечной десятичной дробью.

Теперь вернемся к вопросу, как выглядит какое-нибудь число в двоичной системе. Для того, чтобы легко переводить любое число в двоичную систему, надо все, что было сказано про десятичную, перенести на двоичную. В двоичной системе разрядами будут степени двойки 2, число надо будет разложить по ним:

$x = n \cdot 2^m + n_1 \cdot 2^{m-1} + \ldots n_m \cdot 2^0 + n_{m+1} \cdot 2^1 + \ldots$, и запись его в двоичной системе тогда: $n n_1 n_2 \ldots n_m , n_{m+1} \ldots$, причем соответственно n_i могут принимать всего два значения, 0 и 1.

То есть уже число $2 = 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$ имеет запись 10 в двоичной системе. Соответственно 3 записывается как 11, 4 как 100, 5 как 101 ($5 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$) и т. д. Число 113, например, надо начать записывать по приведенному алгоритму: найти сначала такое m, что $2^m \le 113 < 2^{m+1}$. Это m =6: $64 \le 113 < 128$. Затем то же самое находим для 113-64=49: $32 \le 49 < 64$. Затем для 49-32=17: $16 \le 17 < 32$. Наконец, 17-16=1. Итак, имеем:

$113 = 64 + 32 + 16 + 1 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$. Запись: 1110001.

Произвольному вещественному числу таким образом будет соответствовать строчка из 0 и 1, возможно бесконечная справа после запятой, если дробную часть числа нельзя представить в виде конечной суммы отрицательных степеней числа 2. Но не любая такая строчка (будем говорить «последовательность» вместо «строчка») получится при

указанном алгоритме. Так же, как и в десятичной системе, не получится такой бесконечной последовательности, в которой после запятой с какого-то места идут только одни 1 «до бесконечности». Не получатся такие последовательности в силу такого обстоятельства: рассмотрим, например, число, имеющее двоичную запись 0,1111111….

Это число равно $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\left(\frac{1}{2}\right)^n+...$ Сумма этой бесконечной геометрической прогрессии равна 1. То есть число с такой записью – это 1 и по нашему алгоритму именно запись в виде 1 и получится. Это значит, что соответствие между вещественными числами и всевозможными последовательностями из 0 и 1, содержащими запятую, не будет взаимно-однозначным: каждому числу мы поставили в соответствие такую последовательность (заметим, что конечный набор из 0 и 1 всегда можно дополнить запятой в случае целого числа и нулями справа до бесконечности, так что можно говорить, что любое вещественное число выражается такой бесконечной последовательностью), но бывает так, что две различных последовательности, как в случае 1,00000…. и 0,1111111… - выражают одно и то же число.

Счетные и несчетные множества.

Отличаются также множества $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q}$ от $\mathbb{R}$ и по «количеству» их элементов. При этом самое странное, что первые три множества в этом смысле не отличаются друг от друга. Как это может быть? Ведь каждое из них является подмножеством следующего. То есть в следующем множестве есть все элементы предыдущего, но также есть и такие, которые предыдущему не принадлежат. Нам кажется очевидным в таком случае, что в следующем элементов больше. Действительно, в мире, где все множества конечны, то есть состоят из конечного числа элементов, такое наше представление будет верно: строгое подмножество содержит меньшее количество элементов, чем само множество. (для операции «включения» $A \subset B$ есть определение: $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$. Поэтому само множество согласно этому определению также является своим подмножеством: $A \subset A$. Вот чтобы оличать от этого случая, и будем говорить «строго принадлежит» или является «строгим подмножеством» , когда кроме его элементов, во множестве есть и не входящие в него. Однако если допустить существование бесконечных множеств, а у нас уже натуральные числа бесконечное множество, то начинаются всякие чудеса. Это потому, что мы не дали определение, что же такое количество элементов для бесконечного множества. Количество элементов для конечного множества – мы уже говорили – это количество номеров, которые мы «выдадим» каждому элементу.

И тут нам надо строго определить такое понятие, как **взаимно-однозначное**

соответствие. Пусть есть два множества A и B. И каждому элементу множества A ставится в соответствие некоторый элемент множества B: $\forall x \in A \exists y \in B : x \to y$, причем так, что $x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2$, то есть **разным элементам первого множества не может соответствовать один и тот же элемент второго.** И еще: $\forall y \in B \exists x \in A : x \to y$, то есть **для каждого элемента *y* второго множества найдется «прообраз», то есть элемент первого множества, которому этот *y* соответствует.** При таком соттветствии, очевидно, что стрелочку в одну сторону $x \to y$ можно заменить стрелочкой «двусторонней»: $x \leftrightarrow y$.

То есть речь идет о взаимно-однозначном соответствии, которое мы установили между нашим множеством и «отрезком» натуральных чисел. Итак, вот появляется и определение, что же такое конечное множество – это такое множество, между элементами которого и конечным отрезком $\mathbb{N}: 1,2,...n$ можно установить взаимно-однозначное соответствие:

$1 \leftrightarrow x_1, 2 \leftrightarrow x_2, 3 \leftrightarrow x_3, ...n \leftrightarrow x_n$. То есть у каждого элемента, как у спортсмена, «на груди висит» номер, или лучше представлять, что все они рассажены на ряд стульев, пронумерованных, как в кинотеатре, на каждом стуле ровно один, и, начиная от первого стула все стулья заняты. Тогда номер последнего стула – *n* – и есть количество элементов множества.

Если же представить, что ряд стульев никогда не кончается, то есть за всяким стулом с номером *n* идет стул с номером *n*+1, то можно «рассадить на них» и бесконечное множество. Итак,

Определение. Если между двумя множествами можно установить **взаимно-однозначное соответствие (биекцию)** , то такие два множества называются **равномощными.**

То есть для бесконечных множеств вместо обычного понятия «количество элементов» , вводится понятие **мощность множества** именно в плане биекции с другими множествами**.**

Определение: если между элементами некоторого множества и **элементами множества натуральных чисел** можно установить взаимно-однозначное соответствие (дальше мы будем его называть коротко «биекция»), то такое множество мы будем называть **счётным:**

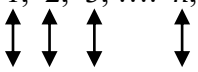
$\forall n \in \mathbb{N} : 1 \leftrightarrow x_1, 2 \leftrightarrow x_2, 3 \leftrightarrow x_3, ...n \leftrightarrow x_n, ...$

Как видно, эти «номера на груди» или «номерки от мест в кинотеатре» у каждого элемента в нижнем индексе. Поэтому в дальнейшем, подразумевая эту биекцию, мы будем

обозначать счетные множества обычно так: $\{x_1, x_2, ...x_n...\}$.

И вот тут начинается странное. Например, множество натуральных чисел оказывается равномощным своему подмножеству только четных чисел, хотя, казалось бы, их вдвое меньше. Очевидная биекция схематически такова:

1, 2, 3, …. n, …



2, 4, 6, … $2n$, ...

Также оно равномощно и подмножеству нечетных чисел. Более того, оно равномощно и такому «маленькому» своему подмножеству, которое останется, если из каждых 100 чисел выкинуть 99 и оставить только одно: множеству чисел $\{100,200,300,\ldots 100n,\ldots\}$. Биекция очевидно задается $n \leftrightarrow 100n$.

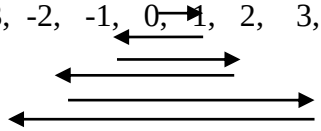
Докажем, что множества $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ равномощны, то есть что $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ являются счетными. Достаточно просто указать подходящую биекцию. То есть «способ рассаживания на стулья с номерами». Для множества целых чисел $\mathbb{Z} = \{0,1,-1,2,-2,...n,-n,...\}$ такая биекция уже содержится в приведенном их перечислении: все рассажены так, что их остается только пронумеровать:

1 2 3 4 5 6 …

0 1 -1 2 -2 -3….

Или, можно указывать очередность присвоения номеров, даже не меняя порядка:

….-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,



Для рациональных чисел тоже можно указать порядок «рассаживания» или нумерации: Сначала расположим все дроби в таблицу:

1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ ...

2 $\frac{2}{2}$ $\frac{2}{3}$ ...

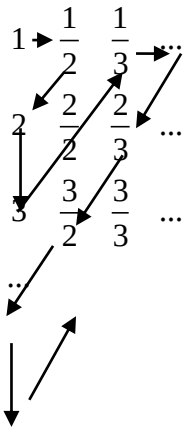
3 $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{3}$ ...

...

То есть на пересечении строки с номером n и столбца с номером m будет стоять дробь $\frac{n}{m}$.

Например, если мы хотим найти, где стоит дробь $\frac{13}{297}$, то ее надо икать в 13 строке и в 297 столбце, на их пересечении. Итак, из этой схемы ясно, что любая дробь, то есть любое рациональное число, где-нибудь обязательно встретится в этой таблице. Теперь выясним, взаимно ли однозначно соответствуют выражения $\frac{n}{m}$ рациональным числам? Нет, потому

что дроби вида $\frac{1}{2},\frac{2}{4},\frac{3}{6}...\frac{m}{2m}$, сидящие в разных местах таблицы, все соответствуют одному и тому же числу. Но это можно исправить – после первого представителя всех остальных «двойников» вычеркнуть. Тогда будет взаимно однозначно представлены все рациональные числа на каких-то (уже не всех) местах таблицы. Осталось указать способ их нумерации. Ну, например, такой: (пропуская вычеркнутых)



Итак, несмотря на наличие в каждом следующем огромного числа новых по отношению к предыдущему элементов, множества $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q}$ равномощны и счетны. А вот множество $\mathbb{R}$ содержит «настолько много» новых элементов по отношению к множеству $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, что между ним и натуральным рядом $\mathbb{N}$ не существует биекции. Как это доказать?

Достаточно доказать несчетность его подмножества: отрезка [0,1]. Но для этого нам понадобится использовать аксиому полноты, в виде одного из эквивалентных ей утверждений, которые называются леммами о полноте. Чем мы и займемся в следующем параграфе. А пока отметим, что эти новые элементы, которых окажется так много, что мощность $\mathbb{R}$ будет следующим уровнем в сравнении мощностей бесконечных множеств – после счетных – мощностью **континуум**, называются **иррациональными числами.** Мы сначала докажем их существование, а потом сможем и явно предъявить некоторые из них.

Прежде, чем ввести понятие иррационального числа и обсудить вопрос его существования, выведем из аксиомы полноты и вытекающей из нее леммы о точной верхней грани еще три очень важные леммы. Все эти четыре леммы обладают свойством заменять собой аксиому полноты и, кроме того, крайне важны для дальнейшего.

§7. Основные леммы о полноте.

1. Лемма о вложенных отрезках

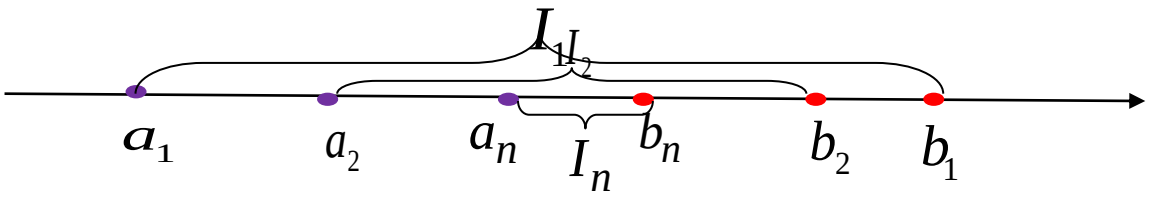
Определение 1. Пусть имеем $a,b\in\mathbb{R}: a<b$. Тогда отрезком называется множество

$[a,b] \equiv \{x : a \le x \le b\}$, интервалом называется множество $(a,b) \equiv \{x : a < x < b\}$, полуинтервалом множество $(a,b] \equiv \{x : a < x \le b\}$ или $[a,b) \equiv \{x : a \le x < b\}$.

Определение 2. Длиной для множества V, являющегося либо отрезком, либо интервалом, либо полуинтервалом, обозначаемой через $|V|$, называется величина $|V| \equiv \sup_V x - \inf_V x$.

Заметим, что вместо прежнего определения модуля числа: $|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \ge 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$ можно использовать равносильное: $|x| = \max\{x, -x\}$. Тогда ясно, что наше определение длины равносильно $|V| = \sup_{x,y \in V} |x - y|$. Также из этого следует, что для любого такого множества V, имеющего концы a и b, длина $|V| = |b - a|$.

Определение 3. Счетная система отрезков $I_1 = [a_1, b_1], I_2 = [a_2, b_2], \ldots I_n = [a_n, b_n], \ldots, \quad n \in \mathbb{N},$ называется системой вложенных отрезков, если для любого $n \quad I_n \supset I_{n+1}$. Иначе можно это записать: $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset I_{n+1} \ldots$.



Лемма. Любая счетная система вложенных отрезков имеет общую точку, если при этом для любого $\varepsilon > 0 \ \exists I_n : |I_n| < \varepsilon$, то система имеет только одну общую точку.

◀Рассмотрим множество левых концов и множество правых концов: $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}, B = \{b_n, n \in \mathbb{N}\}$. Эти множества удовлетворяют аксиоме полноты, действительно, если бы это было не так и существовали номера n и m такие, что $b_m < a_n$, то было бы $a_m \le b_m < a_n \le b_n \Rightarrow I_m \cap I_n = \varnothing$, что невозможно по условию. Поэтому по аксиоме полноты есть число c такое, что $a_n \le c \le b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Осталось доказать, что оно единственно, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists I_n : |I_n| < \varepsilon$. Пусть это не так, и есть другая общая точка всех отрезков: c_1. Тогда обе точки принадлежат любому отрезку, а по условию для $\varepsilon = |c - c_1|$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$,

что $|I_n| < |c - c_1|$, ясно, что для двух точек этого отрезка это невозможно.►

3.2. Лемма о конечном подпокрытии.

3.3. Лемма о предельной точке.

(см. Зорич, меньше двух страниц)

§8. Существование иррациональных чисел.

После введения всех аксиом, определения множества $\mathbb{N}$ - натуральных чисел, множества $\mathbb{Z}$ - целых чисел, множества $\mathbb{Q}$ - рациональных чисел, остался открытым вопрос, почему в $\mathbb{R}$ существуют какие-то другие элементы, кроме $\mathbb{Q}$. То есть: не получится ли в результате аксиоматического построения множество $\mathbb{Q}$? Без аксиомы полноты – и получилось бы.

Теорема. Множество чисел отрезка [0,1] не счетно. ◄От противного: пусть оно счетно, то есть существует биекция $\mathbb{N} \leftrightarrow [0,1]$, то есть все числа на отрезке занумерованы: $x_1, x_2, ..., x_n ...$ Поделим отрезок пополам и выберем ту половину, которая не содержит x_1. Ее опять поделим пополам и выберем ту половину, которая не содержит x_2 и т.д. Все эти половины образуют систему вложенных отрезков. Поэтому на [0,1] существует общая точка всех этих отрезков, которая не совпадает по построению ни с одной из точек $x_1, x_2, ..., x_n ...$, а они составляют по предположению все множество [0,1], что означает противоречие. ►

Заметим, что мы тем самым доказали теорему существования иррациональных чисел, не предъявив ни одного иррационального числа. Но мы можем их предъявить явно.

Теорема (о существовании корня *n*-й степени). Для всякого натурального *n* и всякого вещественного числа $x > 0$ найдется и притом единственное такое вещественное число $y > 0$, что $y^n = x$.

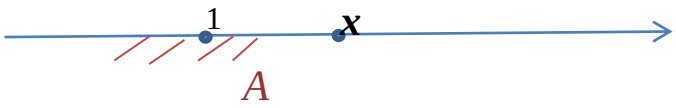
Докажем ее для $n = 2$, то есть для квадратного корня.

Итак, докажем, что для всякого вещественного числа $x > 0$ существует и притом единственное вещественное число $y > 0$ такое, что $y^2 = x$.

◄Можно исключить из дальнейшего рассмотрения $x = 1$, так как для него такое y

имеется. Итак, пусть задано какое-нибудь $x > 0$, $x \neq 1$.

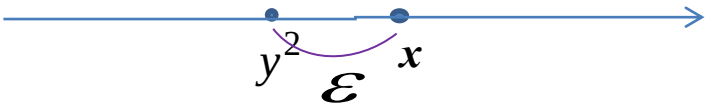
Рассмотрим множество всех положительных чисел z, таких что $z^2 < x$. Обозначим его A. Оно не пусто, так как в случае $x < 1$ ему принадлежит само x, а в случае $x > 1$ ему принадлежит 1.



Это множество ограничено сверху: 1 в первом случае, и x во втором, следовательно, имеет точную верхнюю грань. Обозначим ее $y = \sup A$. Покажем, что этот y и есть искомое число, то есть удовлетворяет $y^2 = x$.

От противного: пусть не верно, что $y^2 = x$. Тогда имеет место одно из двух : либо $y^2 < x$, либо $y^2 > x$.

1) если $y^2 < x \Rightarrow \varepsilon = x - y^2 > 0$.



Идея заключается в том, чтобы найти такое $y_1 > y$, что $y_1^2 < x$. Тогда мы придем к противоречию: так как $y_1^2 < x \Rightarrow y_1 \in A$, тогда не может быть $y_1 > y = \sup A$.

Будем подбирать такое y_1, заметив, что любое $y_1 > y$ имеет вид $y_1 = y + h, \quad h > 0$.

по формуле бинома Ньютона имеем: $(y+h)^2 = y^2 + 2yh + h^2 = y^2 + h(2y+h)$. Если брать $h \le 1$, то можно заменить скобку: $(2y+h) \le (2y+1)$. А если теперь взять h так, чтобы $h < \dfrac{\varepsilon}{2y+1}$, что равносильно $h(2y+1) < \varepsilon$ (поскольку все множители здесь положительны), то будет верно неравенство:

$$(y+h)^2 = y^2 + h(2y+h) \le y^2 + h(2y+1) < y^2 + \varepsilon = x$$

Итак, нам удалось найти такое $y_1 = y + h > y$, которое тоже принадлежит A, поэтому y не может быть точной верхней гранью A, что противоречит предположению.

2) если $y^2 > x \Rightarrow \varepsilon = y^2 - x > 0, \quad x = y^2 - \varepsilon$. Теперь идея будет в том, чтобы найти такое $y_1 < y$, чтобы ${y_1}^2 > x$. Тогда не только $y_1 \notin A$

(напомним, в А входят только те числа, квадраты которых **меньше** х), но и для любого $t > y_1 \Rightarrow t^2 > {y_1}^2 > x \Rightarrow t \notin A$. Поэтому на множестве $[y_1, y]$ нет точек из A, что противоречит основному свойству точной верхней грани A (о том, что в любой близости слева от нее найдется число из множества А) .

Будем подбирать такое y_1, заметив, что любое $y_1 < y$ имеет вид $y_1 = y - h, \ h > 0$.
Для любого $h : 0 < h \le 1$ по формуле бинома Ньютона имеем:

$$(y-h)^2 = y^2 - 2yh + h^2 > y^2 - 2yh - h^2 \ge y^2 - 2yh - h = y^2 - h(2y+1).$$

Здесь мы воспользовались $h \le 1 \Rightarrow h^2 \le h \Rightarrow -h^2 \ge -h$. Теперь, если взять снова $h < \dfrac{\varepsilon}{(2y+1)}$, в силу $h(2y+1) < \varepsilon \Rightarrow -h(2y+1) > -\varepsilon$ получится

$$(y-h)^2 > y^2 - h(2y+1) > y^2 - \varepsilon = x.$$

Итак, нам удалось найти такое $y_1 = y - h < y$, что ${y_1}^2 > x$. Поэтому на множестве $[y_1, y]$ нет точек из A, что противоречит основному свойству точной верхней грани A.

Поэтому y не может быть точной верхней гранью A, что противоречит предположению. Значит, $y^2 = x$.▶

Теперь, доказав, что для всякого вещественного числа $x > 0$ существует и притом единственное (единственность вытекает из способа доказательства – там явно указано, что это за число) вещественное число $y > 0$ такое, что $y^2 = x$, можно дать определение:

Определение. Число $y > 0$ такое, что $y^2 = x$, называется корнем второй степени (или квадратным корнем) из x.

На случай произвольного натурального *n* доказательство переносится без существенных изменений.

Определение. Число $y > 0$ такое, что $y^n = x$, называется корнем *n*-й степени из числа $x > 0$.

Определение. Число y такое, что $y^n = x$, называется корнем этого уравнения, иногда оно называется корнем *n*-й степени из *x*.

В чем разница этих двух определений?

Ясно, что в первом определении, как и в предыдущем доказательстве, речь шла об **арифметическом** корне из **положительного** числа, и только в этом смысле **корень всегда существует и единственен в** $\mathbb{R}$**.** Но можно говорить и просто о корне как в последнем определении и тогда в каких-то случаях их не существует в $\mathbb{R}$ (в каких?), а в каких-то корень не один, а корней несколько.

Но вернемся к вопросу о том, почему нам явно не хватает рациональных чисел. Убедимся, что полученные таким образом вещественные числа, являющиеся корнями *n*-й степени из даже только натуральных чисел, в большинстве случаев не являются рациональными.

То есть, например, корень квадратный из случайно взятого натурального числа скорее всего не будет рациональным. Для числа 2 можно вспомнить доказательство из школьного курса. Попробуйте только модифицировать его для 3; 5 или 7.

Например, доказать, что $\sqrt{7}$ иррационально, можно так: пусть это не так и оно рационально, то есть записывается в виде несократимой дроби $\frac{m}{n} \Leftrightarrow \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 7 \Leftrightarrow m^2 = 7n^2 \Leftrightarrow$ *m* делится на *7*. Тогда его квадрат делится и на 49. Сократив 7 слева и справа, получим, что в левой части остался множитель 7, поэтому *n* должно делится на 7, что означает, что дробь была сократимая, и это означает противоречие.

Заметим, что после доказательства иррациональности какого-нибудь корня из *x* мы имеем право утверждать, что множество $\mathbb{Q}$ в отличие от $\mathbb{R}$ не полно (не выполнена аксиома полноты), потому что в нем точной верхней грани для множества всех *z* таких, что $z^2 < x$, не оказалось.

Итак, с одной стороны, мы доказали, что множество $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ не пусто, с другой стороны, предъявили явно числа из этого множества.

Определение. Множество $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ называется множеством иррациональных чисел, а его элементы – иррациональными числами.

К вопросу о мощности этого множества:

Утверждение : Объединение любого бесконечного множества X со счетным множеством M равномощно множеству X.

◄Возьмем в множестве X какое-нибудь счетное подмножество $K = \{x_1, x_2 \ldots x_n \ldots\}$, Это можно сделать, выбрав произвольно первый элемент, в оставшемся множестве – второй и т. д., и если бы этот процесс нельзя было продолжать неограниченно, то есть на каком-то шаге элементов в оставшемся множестве не стало бы, то значит их было конечное число, что противоречит предположению. Множества $K \cup M$ и K биективны, по теореме о счетности объединения двух счетных множеств (можно указать биекцию и явно, например, если элементы M обозначить $M = \{y_1, y_2 \ldots y_n \ldots\}$, то такая биекция:

$$x_1 \leftrightarrow x_1, y_1 \leftrightarrow x_2, x_2 \leftrightarrow x_3, y_2 \leftrightarrow x_4, \ldots x_n \leftrightarrow x_{2n-1}, y_n \leftrightarrow x_{2n} \ldots$$

Теперь все остальные точки – точки множества $X \backslash K$ (если они есть) - поставим в соответствие себе самим: $x \leftrightarrow x$, в итоге получена биекция $X \cup M \leftrightarrow X$ ►

Это утверждение можно перефразировать и так: если из бесконечного множества убрать счетное множество его элементов, то его мощность не изменится.

Поскольку $\mathbb{Q}$ счетно, получаем, что $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ - **несчетно, или мощности континуум.**